Bases Matemáticas

Aula 2 – Métodos de Demonstração

Rodrigo Hausen

Como o Conhecimento Matemático é Organizado

Definições

- **Definição**: um enunciado que descreve o significado de um termo.
  - Ex.: (Definição de linha, segundo Euclides)
    Linha é o que tem comprimento e não tem largura.

Como o Conhecimento Matemático é Organizado

Definições	Axiomas

- **Axioma**: um ponto de partida de raciocínio, uma proposição **assumida como** verdadeira.
  - Ex.: (Primeiro postulado de Euclides)
    Pode-se traçar uma única linha reta entre dois pontos distintos.

Como o Conhecimento Matemático é Organizado

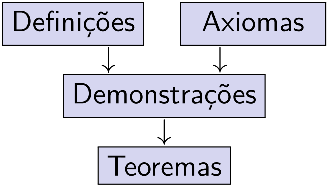
Definições

Axiomas

Teoremas

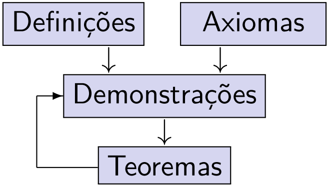
- **Teorema**: uma proposição **que se demonstra** ser verdadeira, baseada em proposições anteriores.
  - Ex.: (Teorema de Pitágoras) A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Como o Conhecimento Matemático é Organizado



- **Demonstração**: prova de que um teorema é verdadeiro, obtida por regras válidas.
  - Em geral, existem várias maneiras de se demonstrar um teorema.

Como o Conhecimento Matemático é Organizado



- **Demonstração**: prova de que um teorema é verdadeiro, obtida por regras válidas.
  - Em geral, existem várias maneiras de se demonstrar um teorema.

Algumas definições básicas

Hoje vamos aprender algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

1. Um número inteiro não nulo a **divide** um número inteiro b se existe um inteiro k, tal que $b = ak$.

Algumas definições básicas

Hoje vamos aprender algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

1. Um número inteiro não nulo a **divide** um número inteiro b se existe um inteiro k, tal que $b = ak$.
2. Se a divide b, dizemos que b é **múltiplo** de a.

Algumas definições básicas

Hoje vamos aprender algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

1. Um número inteiro não nulo a **divide** um número inteiro b se existe um inteiro k, tal que $b = ak$.
2. Se a divide b, dizemos que b é **múltiplo** de a.
3. Um número inteiro a é dito **par** se 2 divide a, ou seja, se existe número inteiro k tal que $a = 2k$, portanto, a é múltiplo de 2.

Algumas definições básicas

Hoje vamos aprender algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

1. Um número inteiro não nulo a **divide** um número inteiro b se existe um inteiro k, tal que $b = ak$.
2. Se a divide b, dizemos que b é **múltiplo** de a.
3. Um número inteiro a é dito **par** se 2 divide a, ou seja, se existe número inteiro k tal que $a = 2k$, portanto, a é múltiplo de 2.
4. Um número inteiro b é dito **ímpar** se 2 não divide b, nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro k tal que $b = 2k + 1$

Algumas definições básicas

Hoje vamos aprender algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

1. Um número inteiro não nulo a **divide** um número inteiro b se existe um inteiro k, tal que $b = ak$.
2. Se a divide b, dizemos que b é **múltiplo** de a.
3. Um número inteiro a é dito **par** se 2 divide a, ou seja, se existe número inteiro k tal que $a = 2k$, portanto, a é múltiplo de 2.
4. Um número inteiro b é dito **ímpar** se 2 não divide b, nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro k tal que $b = 2k + 1$
5. Um número real r é dito **racional** se existirem números inteiros p, q tais que $r = \frac{p}{q}$
6. Um número real r é dito **irracional** se não for racional, ou seja, se não existem inteiros p, q tal que $r = \frac{p}{q}$

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, se n, m são números pares,

então $n + m$ também é par .

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n+m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade):

Tese (conclusão):

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão):

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão): $n + m$ é par

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão): $n + m$ é par

Demonstração: Como n e m são pares, pela definição 3, $n = 2k$ e $m = 2\ell$, onde k e ℓ são inteiros.

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão): $n + m$ é par

Demonstração: Como n e m são pares, pela definição 3, $n = 2k$ e $m = 2\ell$, onde k e ℓ são inteiros. Logo,

$$n + m =$$

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n+m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão): $n + m$ é par

Demonstração: Como n e m são pares, pela definição 3, $n = 2k$ e $m = 2\ell$, onde k e ℓ são inteiros. Logo,

$$n + m = 2k + 2\ell =$$

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão): $n + m$ é par

Demonstração: Como n e m são pares, pela definição 3, $n = 2k$ e $m = 2\ell$, onde k e ℓ são inteiros. Logo,

$$n + m = 2k + 2\ell = 2(k + \ell)$$

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão): $n + m$ é par

Demonstração: Como n e m são pares, pela definição 3, $n = 2k$ e $m = 2\ell$, onde k e ℓ são inteiros. Logo,

$$n + m = 2k + 2\ell = 2(k + \ell)$$

Concluímos que $n + m$ é múltiplo de 2, ou seja, $n + m$ é par. $\square$

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração, e a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ assuma que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1 Demonstre que, $\boxed{\text{se } n, m \text{ são números pares,}}$ $\boxed{\text{então } n + m \text{ também é par}}$.

Hipótese (assumimos como verdade): n, m são números pares

Tese (conclusão): $n + m$ é par

Demonstração: Como n e m são pares, pela definição 3, $n = 2k$ e $m = 2\ell$, onde k e ℓ são inteiros. Logo,

$$n + m = 2k + 2\ell = 2(k + \ell)$$

Concluímos que $n + m$ é múltiplo de 2, ou seja, $n + m$ é par. $\square$

fim da demonstração

Demonstração Direta

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Demonstração Direta

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese:
Tese (conclusão):

Demonstração Direta

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão):

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão): n^2 é ímpar

Demonstração Direta

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão): n^2 é ímpar

Demonstração: Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k.

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão): n^2 é ímpar

Demonstração: Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 =$$

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão): n^2 é ímpar

Demonstração: Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 = (2k+1)^2 =$$

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão): n^2 é ímpar

Demonstração: Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$$

Demonstração Direta

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão): n^2 é ímpar

Demonstração: Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 =$$

Demonstração Direta

Exemplo 2 Demonstre que o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Aqui, a proposição não está no formato "se p, então q," mas dá para alterar a frase, sem mudar o seu sentido:

Demonstre que, se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

Hipótese: n é ímpar
Tese (conclusão): n^2 é ímpar

Demonstração: Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$$

Onde $\ell = 2k^2 + 2k$ é um inteiro. Portanto, n^2 é ímpar. $\square$

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa;

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contrapositiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada.

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contrapositiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada.

Exemplo 3 Demonstre que, se n^2 é par, então n também é.

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contrapositiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada.

Exemplo 3 Demonstre que, se n^2 é par, então n também é.

Proposição: n^2 é par $\Rightarrow$ n é par.

Note que a proposição é bem simples, e poderíamos usar uma demonstração direta.

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contrapositiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada.

Exemplo 3 Demonstre que, se n^2 é par, então n também é.

Proposição: n^2 é par $\Rightarrow$ n é par.

Note que a proposição é bem simples, e poderíamos usar uma demonstração direta. Contudo, ao observar a contrapositiva:

Contrapositiva:

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contrapositiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada.

Exemplo 3 Demonstre que, se n^2 é par, então n também é.

Proposição: n^2 é par $\Rightarrow$ n é par.

Note que a proposição é bem simples, e poderíamos usar uma demonstração direta. Contudo, ao observar a contrapositiva:

Contrapositiva: n é ímpar $\Rightarrow$ n^2 é ímpar.

Demonstração por Contraposição

Da aula passada:
"$p \Rightarrow q$" é equivalente à sua contrapositiva "não $q \Rightarrow$ não p"

Disto resulta que, se "não $q \Rightarrow$ não p" for verdadeira, então "$p \Rightarrow q$" também é, e vice-versa; ou seja, se demonstrarmos a contrapositiva, a proposição original estará automaticamente demonstrada.

Exemplo 3 Demonstre que, se n^2 é par, então n também é.

Proposição: n^2 é par $\Rightarrow$ n é par.

Note que a proposição é bem simples, e poderíamos usar uma demonstração direta. Contudo, ao observar a contrapositiva:

Contrapositiva: n é ímpar $\Rightarrow$ n^2 é ímpar.

Demonstração: A contrapositiva é *verdadeira*, conforme demonstramos no exemplo 2. Portanto, a proposição original também é verdadeira. $\square$

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese:
Tese:

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese:

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n + m$ é ímpar

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n + m$ é ímpar

Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar.

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n+m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n+m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n+m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n+m$ é ímpar

Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar. Para simplificar, escolha $n = 2k$ e $m = 2\ell + 1$, para inteiros k e ℓ

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n + m$ é ímpar

Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar. Para simplificar, escolha $n = 2k$ e $m = 2\ell + 1$, para inteiros k e ℓ (o caso n ímpar e m par pode ser obtido apenas trocando-se n por m). Logo,

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n + m$ é ímpar

Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar. Para simplificar, escolha $n = 2k$ e $m = 2\ell + 1$, para inteiros k e ℓ (o caso n ímpar e m par pode ser obtido apenas trocando-se n por m). Logo,

$$n + m =$$

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n + m$ é ímpar

Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar. Para simplificar, escolha $n = 2k$ e $m = 2\ell + 1$, para inteiros k e ℓ (o caso n ímpar e m par pode ser obtido apenas trocando-se n por m). Logo,

$$n + m = 2k + 2\ell + 1 =$$

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n + m$ é ímpar

Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar. Para simplificar, escolha $n = 2k$ e $m = 2\ell + 1$, para inteiros k e ℓ (o caso n ímpar e m par pode ser obtido apenas trocando-se n por m). Logo,

$$n + m = 2k + 2\ell + 1 = 2(k + \ell) + 1 =$$

Demonstração por Contraposição

Exemplo 4 Sejam n e m números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m tem a mesma paridade.

Proposição: $n + m$ é par $\Rightarrow$ n e m tem mesma paridade.
(note que o universo do discurso são os números inteiros)

Contrapositiva: n e m tem paridades diferentes $\Rightarrow$ $n + m$ é ímpar
(o universo do discurso ainda é o mesmo)

Demonstração: Hipótese: n e m tem paridades diferentes
Tese: $n + m$ é ímpar

Pela hipótese, um dos números é par, e o outro é ímpar. Para simplificar, escolha $n = 2k$ e $m = 2\ell + 1$, para inteiros k e ℓ (o caso n ímpar e m par pode ser obtido apenas trocando-se n por m). Logo,

$$n + m = 2k + 2\ell + 1 = 2(k + \ell) + 1 = 2q + 1,$$

onde $q = k + \ell$ é inteiro. Portanto $n + m$ é ímpar. $\square$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Uma demonstração por redução ao absurdo é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se, alguma proposição do tipo p fosse verdadeira, ocorreria uma contradição lógica, e portanto p só pode ser falso, disto resultando que não p é verdadeiro.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Uma demonstração por redução ao absurdo é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se, alguma proposição do tipo p fosse verdadeira, ocorreria uma contradição lógica, e portanto p só pode ser falso, disto resultando que não p é verdadeiro.

Exemplo 5 Algum dia será possível criar um programa de computador que **sempre ganhe** no xadrez?

Demonstração por Redução ao Absurdo

Uma demonstração por redução ao absurdo é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se, alguma proposição do tipo p fosse verdadeira, ocorreria uma contradição lógica, e portanto p só pode ser falso, disto resultando que não p é verdadeiro.

Exemplo 5 Algum dia será possível criar um programa de computador que **sempre ganhe** no xadrez?

Suponha, por um momento, que a seguinte proposição é válida:
p = "existe um programa de computador que **sempre ganha** no xadrez"

Demonstração por Redução ao Absurdo

Suponha, por um momento, que a seguinte proposição é válida:
p = “existe um programa de computador que **sempre ganha** no xadrez”

Demonstração por Redução ao Absurdo

Suponha, por um momento, que a seguinte proposição é válida:
p = "existe um programa de computador que **sempre ganha** no xadrez"

Supondo que tal programa existe, instale a mesma cópia em dois computadores e coloque um para jogar contra o outro.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Suponha, por um momento, que a seguinte proposição é válida:
p = "existe um programa de computador que **sempre ganha** no xadrez"

Supondo que tal programa existe, instale a mesma cópia em dois computadores e coloque um para jogar contra o outro. Ou o jogo terminará empatado (sem nenhum ganhador), ou um dos computadores perderá. Em qualquer destes casos, pelo menos uma das duas cópias do programa não vai ganhar o jogo, uma contradição, já que assumimos que o programa **sempre** ganha.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Suponha, por um momento, que a seguinte proposição é válida:
p = "existe um programa de computador que **sempre ganha** no xadrez"

Supondo que tal programa existe, instale a mesma cópia em dois computadores e coloque um para jogar contra o outro. Ou o jogo terminará empatado (sem nenhum ganhador), ou um dos computadores perderá. Em qualquer destes casos, pelo menos uma das duas cópias do programa não vai ganhar o jogo, uma contradição, já que assumimos que o programa **sempre** ganha.

Portanto, não existe (nem nunca existirá) um programa que sempre ganhe no xadrez. $\square$

Exemplo 6 Demonstre que existem infinitos números primos.

Hipótese:
Tese:

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 6 Demonstre que existem infinitos números primos.

Hipótese:
Tese: $p =$ "Existem infinitos números primos"

Exemplo 6 Demonstre que existem infinitos números primos.

Hipótese: (todo e qualquer resultado que não depende deste)
Tese: $p =$ "Existem infinitos números primos"

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 6 Demonstre que existem infinitos números primos.

Hipótese: (todo e qualquer resultado que não depende deste)
Tese: $p =$ "Existem infinitos números primos"

Demonstração: Vamos deixar de lado a tese por um momento e supor o seguinte:

Hipótese (absurda): não $p =$ "existe uma quantidade finita de números primos".

Vejamos até onde ela nos leva.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 6 Demonstre que existem infinitos números primos.

Hipótese: (todo e qualquer resultado que não depende deste)
Tese: $p =$ "Existem infinitos números primos"

Demonstração: Vamos deixar de lado a tese por um momento e supor o seguinte:

Hipótese (absurda): não $p =$ "existe uma quantidade finita de números primos".

Vejamos até onde ela nos leva. Por esta nova hipótese, há apenas n números primos, onde n é inteiro.

Exemplo 6 Demonstre que existem infinitos números primos.

Hipótese: (todo e qualquer resultado que não depende deste)
Tese: $p =$ "Existem infinitos números primos"

Demonstração: Vamos deixar de lado a tese por um momento e supor o seguinte:

Hipótese (absurda): não $p =$ "existe uma quantidade finita de números primos".

Vejamos até onde ela nos leva. Por esta nova hipótese, há apenas n números primos, onde n é inteiro. Podemos colocar os primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ em ordem, de tal forma que:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n.$$

Com isto, teríamos que p_n é o maior primo de todos.

(continuação do Exemplo 6)

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

Demonstração por Redução ao Absurdo

(continuação do Exemplo 6)

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, portanto ele *também é primo*

(continuação do Exemplo 6)

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, portanto ele *também é primo* e, além disso, *é maior do que todos os demais números primos*, incluindo p_n.

(continuação do Exemplo 6)

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, portanto ele *também é primo* e, além disso, *é maior do que todos os demais números primos*, incluindo p_n. Mas isto contradiz a afirmação de que p_n é o maior primo de todos, o que é um absurdo!

Demonstração por Redução ao Absurdo

(continuação do Exemplo 6)

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, portanto ele *também é primo* e, além disso, *é maior do que todos os demais números primos*, incluindo p_n. Mas isto contradiz a afirmação de que p_n é o maior primo de todos, o que é um absurdo!
Como o nosso raciocínio foi construído corretamente após a hipótese não p, isto nos leva a concluir que não p é falsa, consequentemente a proposição $p =$ "existem infinitos números primos" é verdadeira. $\square$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$.

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$(\sqrt{2})^2 =$$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 =$$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$2 = (\sqrt{2})^2 \quad = \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$2b^2 = a^2 =$$

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 =$$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad (\div 2) \\ b^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad (\div 2) \\ b^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

o que nos diz que b também é par.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad (\div 2) \\ b^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

o que nos diz que b também é par. Mas isto é uma contradição, pois se a e b são pares, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ poderia ser reduzida, um absurdo!

Demonstração por Redução ao Absurdo

Exemplo 7 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Portanto, seria possível encontrar números inteiros a, b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. A partir disto, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} 2 = (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Disto temos que a^2 é par e, pelo que demonstramos no exemplo 3, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$\begin{aligned} 2b^2 &= a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \qquad (\div 2) \\ b^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

o que nos diz que b também é par. Mas isto é uma contradição, pois se a e b são pares, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ poderia ser reduzida, um absurdo! Logo, podemos concluir que o número real $\sqrt{2}$ não pode ser racional, portanto é irracional. $\square$

Resumo: Métodos de Demonstração

1. **Demonstração Direta**: partindo da hipótese, use diretamente propriedades e regras válidas até chegar na tese.

Resumo: Métodos de Demonstração

1. **Demonstração Direta**: partindo da hipótese, use diretamente propriedades e regras válidas até chegar na tese.
2. **Demonstração por Contraposição**: para algumas proposições do tipo $p \Rightarrow q$, pode ser mais fácil demonstrar (usando os outros métodos) não $q \Rightarrow$ não p.

Resumo: Métodos de Demonstração

1. **Demonstração Direta**: partindo da hipótese, use diretamente propriedades e regras válidas até chegar na tese.
2. **Demonstração por Contraposição**: para algumas proposições do tipo $p \Rightarrow q$, pode ser mais fácil demonstrar (usando os outros métodos) não $q \Rightarrow$ não p.
3. **Demonstração por Redução ao Absurdo**: dada uma proposição p a ser provada, assuma inicialmente a hipótese não p, e faça um raciocínio direto a partir desta hipótese até achar uma contradição.

Resumo: Métodos de Demonstração

1. **Demonstração Direta**: partindo da hipótese, use diretamente propriedades e regras válidas até chegar na tese.
2. **Demonstração por Contraposição**: para algumas proposições do tipo $p \Rightarrow q$, pode ser mais fácil demonstrar (usando os outros métodos) não $q \Rightarrow$ não p.
3. **Demonstração por Redução ao Absurdo**: dada uma proposição p a ser provada, assuma inicialmente a hipótese não p, e faça um raciocínio direto a partir desta hipótese até achar uma contradição.

Dica 1: geralmente, é uma boa idéia tentar aplicar os métodos nesta ordem.

Dica 2: é comum demonstrações do tipo "número x é irracional" ou "não existe x tal que..." serem por redução ao absurdo.

Demonstrações do tipo “se, e somente se”

O seguinte enunciado é muito comum:

“p (é verdade) se, e somente se, q (é verdade)”

Demonstrações do tipo "se, e somente se"

O seguinte enunciado é muito comum:

"p (é verdade) se, e somente se, q (é verdade)"

Ou, na forma simbólica, "$p \Leftrightarrow q$" (lê-se: p, se e somente se, q)

Demonstrações do tipo "se, e somente se"

O seguinte enunciado é muito comum:

"p (é verdade) se, e somente se, q (é verdade)"

Ou, na forma simbólica, "$p \Leftrightarrow q$" (lê-se: p, se e somente se, q)

Isto equivale a **duas** proposições:

"se p então q" **E** "se q então p"

Ou, simbolicamente, "$(p \Rightarrow q)$ e $(q \Rightarrow p)$."

Demonstrações do tipo "se, e somente se"

O seguinte enunciado é muito comum:

"p (é verdade) se, e somente se, q (é verdade)"

Ou, na forma simbólica, "$p \Leftrightarrow q$" (lê-se: p, se e somente se, q)

Isto equivale a **duas** proposições:

"se p então q" **E** "se q então p"

Ou, simbolicamente, "$(p \Rightarrow q)$ e $(q \Rightarrow p)$."

Cada uma das duas proposições deve ser demonstrada separadamente.

Exemplo 8 Demonstre que dois inteiros a e b possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é número ímpar.

Demonstrações do tipo "se, e somente se"

Exemplo 8 Demonstre que dois inteiros a e b possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é número ímpar.

Demonstração: Temos que provar as implicações:

1. a e b possuem paridades diferentes $\Rightarrow$ $a + b$ é ímpar.
2. $a + b$ é ímpar $\Rightarrow$ a e b possuem paridades diferentes

Exemplo 8 Demonstre que dois inteiros a e b possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é número ímpar.

Demonstração: Temos que provar as implicações:

1. a e b possuem paridades diferentes $\Rightarrow$ $a + b$ é ímpar.
2. $a + b$ é ímpar $\Rightarrow$ a e b possuem paridades diferentes

Note que a implicação 1 é a contrapositiva da proposição do exemplo 4, portanto já foi demonstrada ser verdadeira.

Exemplo 8 Demonstre que dois inteiros a e b possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é número ímpar.

Demonstração: Temos que provar as implicações:

1. a e b possuem paridades diferentes $\Rightarrow$ $a + b$ é ímpar.
2. $a + b$ é ímpar $\Rightarrow$ a e b possuem paridades diferentes

Note que a implicação 1 é a contrapositiva da proposição do exemplo 4, portanto já foi demonstrada ser verdadeira.

Resta agora demonstrar a implicação 2, usando algum dos métodos vistos (direto, por contrapositiva, por redução ao absurdo).

Demonstrações do tipo "se, e somente se"

Exemplo 8 Demonstre que dois inteiros a e b possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é número ímpar.

Demonstração: Temos que provar as implicações:

1. a e b possuem paridades diferentes $\Rightarrow$ $a + b$ é ímpar.
2. $a + b$ é ímpar $\Rightarrow$ a e b possuem paridades diferentes

Note que a implicação 1 é a contrapositiva da proposição do exemplo 4, portanto já foi demonstrada ser verdadeira.

Resta agora demonstrar a implicação 2, usando algum dos métodos vistos (direto, por contrapositiva, por redução ao absurdo).

Trabalho para casa: terminar de provar o exemplo 8, ler as notas até a página 29, fazer os exercícios das notas e da lista 1.